Mécanique classique | Chapitre 6 | TD (M6)

Exercice n°1 • Moment cinétique de l'électron ★☆☆

On suppose qu'un électron a une trajectoire circulaire de rayon $R = 53$ pm autour du noyau, qu'il parcourt à vitesse constante à la fréquence $f = 6,6 \cdot 10^{15}$ Hz. La masse de l'électron est $m = 9,1 \cdot 10^{31}$ kg.

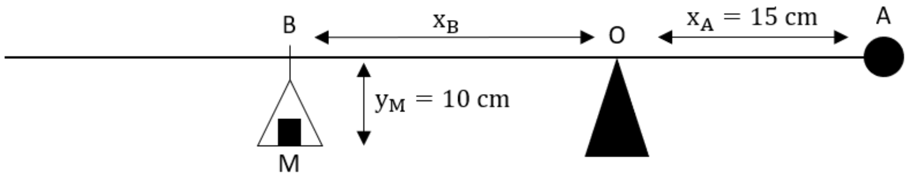
Calculer la valeur du moment cinétique $\overrightarrow{L_0}$ de l'électron par rapport au centre du noyau O.

Remarque : après calcul, vous pourrez remarquer que $\left\|\overrightarrow{L_0}\right\| = \hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ J·s la constante de Planck réduite (une constante fondamentale, qui se retrouve dans toutes les formules de mécanique quantique).

Exercice n°2 • Balancelle ★☆☆

Un type de balance romaine, appelée la balancelle, est décrite ci-dessous.

Le système est uniquement susceptible de tourner autour du point O. Une masse m_A supposée ponctuelle est placée en A. La masse de la barre et de la nacelle sont négligeables. Une masse inconnue m supposée ponctuelle est placée au point M. La distance x_B est réglable par l'utilisateur.



1) Dessiner sur le schéma les 3 forces mises en jeu.

2) Calculer de moment de chaque force par rapport au point O.

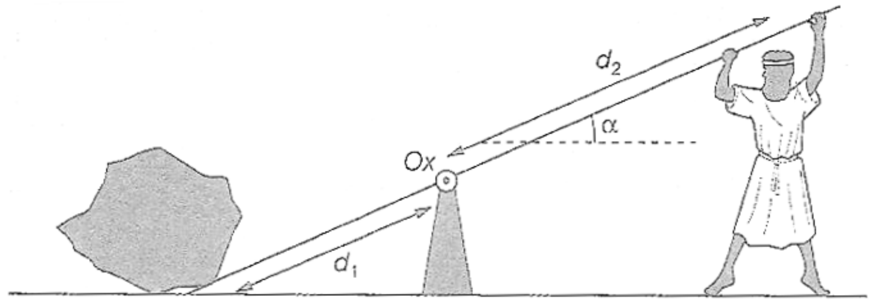
On considère comme système l'ensemble de la balancelle.

3) Déterminer l'expression de la masse inconnue m en fonction des autres grandeurs lorsque la balance est équilibrée.

4) On suppose que cette condition est respectée. La balance est écartée d'un angle α, sans aucune vitesse. Se met-elle à tourner ? Si oui, dans quel sens ?

Exercice n°3 • Effet de levier ★⯪☆

« Donnez-moi un point d'appui et un levier, je soulèverai le monde ». Archimède, $\sim$ 200 av. J.C.



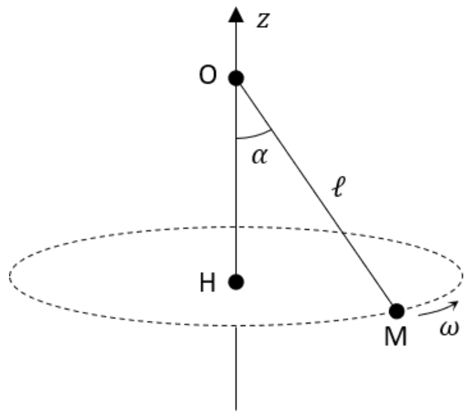
Archimède utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200$ kg. On donne : $d_1 = 50$ cm, $d_2 = 1,5$ m et $\alpha = 60$ °. Archimède et le rocher sont supposés ponctuels.

1) Archimède se suspend au levier : quelle doit-être sa masse minimale pour que le rocher se soulève ?

2) Archimède décide de faire varier la direction de la force qu'il exerce sur le levier. Quel angle doit-il choisir pour minimiser la force à exercer ? Quelle force (l'expression en unité de masse $m = F/g$) minimale doit-il alors appliquer pour soulever le rocher ?

Exercice n°4 • Pendule conique ★★☆

Un point matériel M (de masse m) est suspendu à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ attaché en un point O fixe d'un axe (Oz). Le point M est astreint à tourner autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω constante en formant un cercle de rayon R. La droite (OM) forme donc un angle α constante avec l'axe vertical.



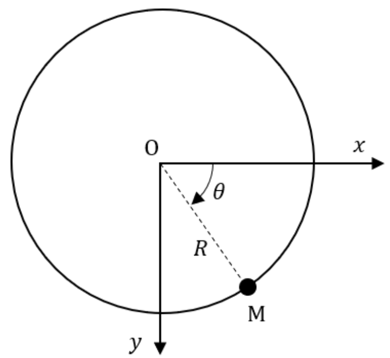
On considère la base cylindrique $(O, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$ de centre O.

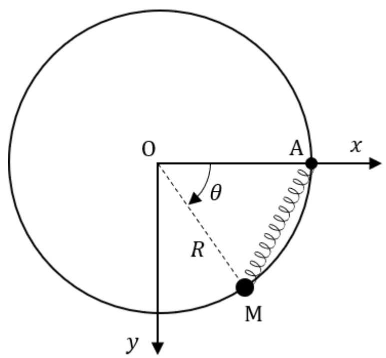
1) Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de M dans cette base, en fonction des constantes du problème.

2) Déterminer l'angle d'inclinaison α.

Exercice n°5 • Guide circulaire ★★☆

Un point matériel de masse m, repéré par le point M est assujetti à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de centre O dans le champ de pesanteur terrestre (schéma de gauche).





1) Déterminer, à l'aide du théorème du moment cinétique, l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ des coordonnées cylindriques.

2) En déduire la pulsation de petites oscillations autour de la position d'équilibre.

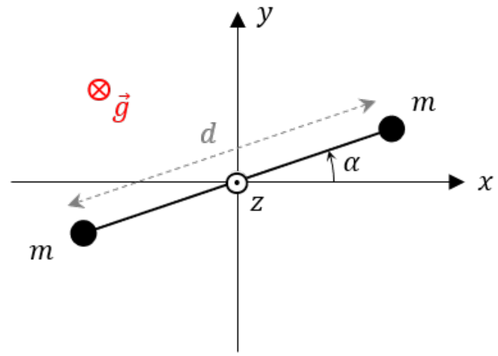
À présent, le point M est lié au point A par un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle (schéma de droite).

3) Établir la nouvelle équation du mouvement à l'aide du TMC.

4) Déterminer les positions d'équilibre.

Exercice n°6 • Expérience de Cavendish (1798) ★★⯪

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, lié au repère (O, x, y, z), est supposé galiléen.



Aux extrémités d'une tige de masse négligeable et de longueur $d = 2,00$ m, on fixe deux sphères assimilées à deux masses ponctuelles $m = 10,105$ kg. Le système $\mathcal{S}$, formé des deux sphères et de la tige, est suspendu au point O, milieu de la tige, à un fil de torsion de raideur C.

Remarque : un fil de torsion est l'équivalent en mécanique de rotation d'un ressort. Lorsque la tige est écartée d'un angle α de l'axe (Oy), le fil de torsion exerce un moment de rappel proportionnel à l'angle d'écartement : $\overrightarrow{\Gamma}_O = -C\alpha\,\overrightarrow{u}_z$.

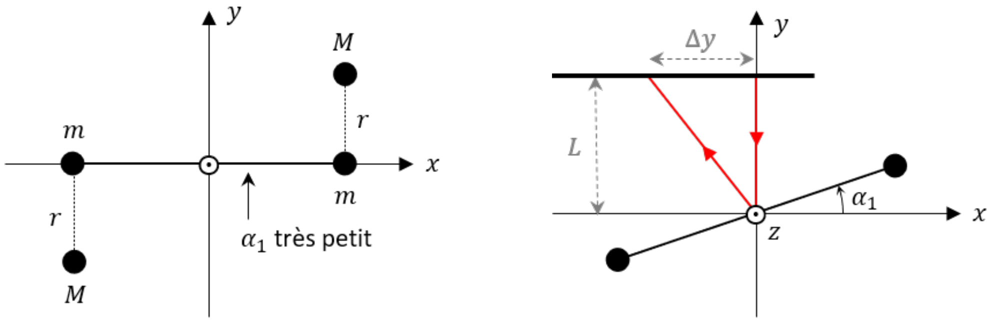
1) Déterminer le moment cinétique du système par rapport à l'axe (Oz), noté L_z.

On tourne la tige d'un angle $\alpha_0 \ll 1$ rad. Le système se met à osciller sans frottement à la période $T = 271,5$ s autour de l'axe (Oz).

2) Établir l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique.

3) En déduire la raideur C du fil de torsion en fonction des données connues de l'expérience. Faire l'application numérique.

On place désormais le système sur sa position d'équilibre $\alpha_{eq} = 0$. On ajoute deux masses $M = 157$ kg à une distance $r = 200$ mm des masses de la tige. Du fait des interactions gravitationnelles, l'ajout des masses provoque une rotation du dispositif d'un angle α_1 trop petit pour être perceptible à l'œil nu. On pourra donc considérer que la tige est confondue avec l'axe (Oy) : cf. schéma de gauche.



4) Déterminer la constante gravitationnelle G en fonction de α_1 et des données connues de l'expérience.

Afin de déterminer expérimentalement α_1, en envoie un faisceau lumineux en O parallèle à l'axe (Oy). La tige (métallique) se comporte comme un miroir parfait. Le faisceau est réfléchi et est observé sur un écran situé à une distance $L = 2,5$ m. On constate que la tâche lumineuse est située à une distance $\Delta y = 2,42$ mm de l'axe (Oy). Cf. schéma de droite, où l'angle α_1 a été exagéré pour mieux représenter les différentes grandeurs.

5) Déterminer la valeur de α_1.

6) En déduire la valeur de G mesurée par cette expérience. Conclure.

Donnée : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}

Éléments de correction

❶ $\overrightarrow{L_0} = mR^2\omega\overrightarrow{u_z}$. ❷ 1) Deux poids, une réaction normale du support. 2) $m = m_A\dfrac{x_A}{x_B}$. 3) La balance reste équilibrée. ❸ 1) $m_{Arch} > \dfrac{d_1}{d_2}M = 67$ kg. 2) $m > \dfrac{d_1}{d_2}M\,\cos(\alpha) = 33$ kg. ❹ 1) $\overrightarrow{L_O} = m\ell^2\omega\,\sin(\alpha)\,(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_r} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_z})$. 2) $\alpha = 0$ si $g > \ell\omega^2$ et $\alpha = \arccos\left(\dfrac{g}{\ell\omega^2}\right)$ sinon. ❺ 1) $\ddot{\theta} = \dfrac{g}{R}\cos(\theta)$. 2) $\omega_0 = \sqrt{g/R}$. 3) $\ddot{\theta} = \dfrac{g}{R}\cos(\theta) - \dfrac{k}{m}\sin(\theta)$. 4) $\tan(\theta_{eq}) = \dfrac{mg}{kg}$. ❻ 1) $L_z(\mathcal{S}) = \dfrac{md^2}{2}\dot{\alpha}$. 2) $\ddot{\alpha} = \omega_0^2\,\alpha(t) = 0$ avec : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2C}{md^2}}$. 3) $C = \dfrac{md^2}{2}\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 = 1,08 \cdot 10^{-2}$ N·m. 4) $G = \dfrac{Cr^2\alpha_1}{dmM}$. 5) $\alpha_1 = \dfrac{\Delta y}{2L} = 4,8 \cdot 10^{-4}$ rad. 6) $G = 6,60 \cdot 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}.